

Міністерство освіти і науки України

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Кафедра прикладної математики

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**

Декан факультету  
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

29 серпня 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Еволюційні системи**

рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ перший (бакалаврський) рівень \_\_\_\_\_

галузь знань 11 – Математика та статистика \_\_\_\_\_

спеціальність 113 – Прикладна математика \_\_\_\_\_

освітня програма «Прикладна математика» \_\_\_\_\_

спеціалізація \_\_\_\_\_

вид дисципліни \_\_\_\_\_ за вибором \_\_\_\_\_

факультет \_\_\_\_\_ математики і інформатики \_\_\_\_\_

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: *Півень Олексій Леонідович*, канд. фіз.-мат. наук, доцент закладу вищої освіти кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики  
Протокол від “26” серпня 2024 року № 8

Завідувач кафедри прикладної математики



Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом  
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією  
факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Еволюційні системи» складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра спеціальності 113 прикладна математика

### 1. Опис навчальної дисципліни

#### 1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни є надання майбутнім спеціалістам знань та застосувань з таких класів еволюційних систем: диференціально-алгебраїчних, різницевих рівнянь та систем еволюційних різницевих рівнянь.

#### 1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

1. Вивчення теорії, застосування та методів побудови розв'язків диференціально-алгебраїчних рівнянь,
2. Вивчення теорії, застосування, та методів побудови розв'язків різницевих рівнянь.

#### 1.3. Кількість кредитів 4

#### 1.4. Загальна кількість годин 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
за вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
7-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
у тому числі індивідуальні завдання	

#### 1.6. Заплановані результати навчання

Студенти повинні досягти таких результатів навчання:

**знати :**

- Теорему існування та єдиності розв'язку явних та неявних різницевих рівнянь, фундаментальну систему розв'язків різницевих рівнянь.
- Жмутки матриць та їх властивості, спектральні проектори

- Теорему існування та єдиності розв'язку диференціально-алгебраїчних рівнянь
- Приклади застосування різницевого та диференціально-алгебраїчних рівнянь

**вміти :**

- Будувати розв'язки явних лінійних різницевого рівнянь та систем еволюційних різницевого рівнянь за допомоги фундаментальної системи розв'язків.
- Будувати розв'язки лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь і неявних систем еволюційних рівнянь за допомоги спектральних проекторів

## 2. Тематичний план навчальної дисципліни

### *Розділ 1. Класичні лінійні різницеві рівняння та системи*

*Тема 1.* Лінійні різницеві рівняння першого порядку та їх застосування.

Поняття різницевого рівняння. Застосування різницевого рівнянь першого порядку (модель інвестування, та дискретна модель зростання, ханойські башти). Однорідне та неоднорідне лінійне різницеве рівняння. Метод варіації сталих розв'язання різницевого рівняння.

*Тема 2.* Властивості розв'язків лінійних різницевого рівнянь вищого порядку.

Лінійне рівняння вищого порядку.

Фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

*Тема 3.* Лінійні різницеві стаціонарні рівняння та їх застосування.

Фундаментальна система розв'язку та побудова загального розв'язку однорідного рівняння. Побудова часткового розв'язку неоднорідного рівняння для спеціальної правої частини. Застосування лінійних різницевого рівнянь другого порядку (числа Фібоначчі та ймовірність банкрутства азартного гравця).

*Тема 4.* Нормальні еволюційні системи різницевого рівнянь та їх застосування.

Поняття еволюційної системи різницевого рівнянь. Застосування еволюційних систем різницевого рівнянь (модель Леслі та дискретна модель Леонтєва). Існування та єдиність розв'язку початкової задачі для системи, явний вигляд розв'язку. Зведення рівняння вищого порядку до нормальної системи рівнянь першого порядку. Фундаментальна система розв'язків.

*Тема 5.* Лінійні стаціонарні системи різницевого рівнянь

Явний вигляд фундаментальної матриці розв'язків. Побудова фундаментальної системи розв'язків з використанням жорданової форми матриць.

*Тема 6.* Лінійні різницеві рівняння над комутативними кільцями.

Класичне і неявне різницеве рівняння. Єдиність розв'язку неявних лінійних різницевого рівнянь. Побудова квазіполіноміальних і періодичних розв'язків.

## **Розділ 2. Диференціально-алгебраїчні рівняння і неявні лінійні стаціонарні системи різницевих рівнянь.**

*Тема 7.* Поняття диференціально-алгебраїчного рівняння. Приклади диференціально-алгебраїчних рівнянь

Диференціально-алгебраїчне рівняння та його відмінність від систем звичайних диференціальних рівнянь. Модель Леонт'єва

*Тема 8.* Жмутки матриць

Матричні функції. Регулярні та сингулярні жмутки матриць. Індекс матриці та індекс жмутка матриць.

*Тема 9.* Спектральні проектори

Спектральні проектори та методи обчислення спектральних проекторів.

*Тема 10.* Існування та єдиність розв'язку лінійного диференціально - алгебраїчного рівняння.

Теорема існування та єдиності розв'язку лінійних диференціально-алгебраїчних рівнянь. Формула варіації сталих та її застосування у побудові наближеного розв'язку.

*Тема 11.* Неявні лінійні стаціонарні системи різницевих рівнянь.

Відмінність від явних стаціонарних систем. Теорема існування та єдиності розв'язку, явний вигляд розв'язку. Критерій існування та єдиності розв'язку системи неявних лінійних різницевих рівнянь.

### **3. Структура навчальної дисципліни**

Назви розділів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
л		п	лаб	інд	ср	л		п	лаб	інд	ср	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Розділ 1 Різницеві рівняння</b>												
Тема 1. Лінійні різницеві рівняння першого порядку та їх застосування.	16	4	4			8						
Тема 2. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь.	16	4	4			8						
Тема 3. Лінійні різницеві стаціонарні рівняння та їх застосування.	16	4	4			8						
Тема 4. Нормальні еволюційні системи різницевих рівнянь та їх застосування.	16	4	4			8						

Тема 5. Лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння та їх застосування	14	4	2			8						
Тема 6. Лінійні різницево-рівняння над комутативними кільцями.	8	2	2			4						
<b>Разом за розділом 1</b>	86	22	20			44						
Розділ 2. Диференціально-алгебраїчні рівняння і неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння.												
Тема 7. Поняття диференціально-алгебраїчного рівняння. Приклади застосування диференціально-алгебраїчних рівнянь	6	2	2			2						
Тема 8. Жмутки матриць	6	2	2			2						
Тема 9. Спектральні проектори	6	2	2			2						
Тема 10. Існування та єдиність розв'язку лінійного диференціально-алгебраїчного рівняння.	6	2	2			2						
Тема 11. Неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння.	6	2	2			2						
<i>Контрольна робота</i>	4		2			2						
<b>Разом за розділом 2</b>	34	10	12			12						
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>						

#### 4. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Лінійні різницево-рівняння першого порядку та їх застосування	4
2	Властивості розв'язків лінійних різницевого рівняння	4
3	Лінійні різницево-стаціонарні рівняння	4
4	Нормальні еволюційні системи різницевого рівняння	4
5	Лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння та їх застосування	2
6	Неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівняння.	2
7	Поняття диференціально-алгебраїчного рівняння. Приклади застосування диференціально-алгебраїчних рівнянь	2
8	Жмутки матриць	2
9	Спектральні проектори	2
10	Існування та єдиність розв'язку лінійного диференціально-	2

	алгебраїчного рівняння	
11	Неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівнянь.	2
12	<i>Контрольна робота</i>	2
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

### 5. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Виконання домашніх завдань за розділом «Класичні лінійні різницево рівняння та системи»	44
2	Виконання домашніх завдань за розділом «Диференціально-алгебраїчні рівняння і неявні лінійні стаціонарні системи різницевого рівнянь»	12
	<b>Разом</b>	<b>56</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом

### 7. Методи навчання

Частково-пошукові і проблемні лекції, пояснення, розрахунково-ілюстративні і пояснювально-ілюстративні методи при проведенні практичних занять, консультації.

### 8. Методи контролю

Перевірка домашніх робіт, перевірка контрольної роботи, поточний контроль на практичних заняттях, поточний контроль на лекціях, проведення заліку.

### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання				Екзамен	Сума
Розділ 1	Розділ 2	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
T1–T6	T7–T11	T1–T11			
10	10	40	60	40	100

T1, T2 ... – теми розділів.

Не передбачається мінімальна кількість балів з навчальної дисципліни, яку здобувач вищої освіти повинен набрати під час поточного контролю, самостійної роботи, індивідуального завдання для допуску до складання підсумкового контролю (екзамену).

### Критерії оцінювання

**Поточний контроль:** 20 балів - бали нараховуються за виконання домашніх завдань і активність під час практичних занять.

**Контрольна робота** оцінюється до 40 балів і складається з 8 завдань, максимальна оцінка за кожне з завдань-5 балів:

- (а) обчислення незакінчені або містять суттєві помилки — 0–1 бал;
  - (б) обчислення правильні, можливі незначні помилки, але обґрунтування не наведено — 2–3 бали;
  - (с) обчислення правильні, можливі незначні помилки, наведено повне обґрунтування — 4–5 балів.
- Бали, отримані за виконання всіх завдань, сумуються (максимальна кількість – 40 балів) і додаються до балів, отриманих за практичні завдання. Максимальна сума – 100 балів. Оцінка виставляється за стандартною шкалою оцінювання.

**Іспит (екзаменаційний білет містить 4 завдання):**

1. У завданні 1 максимальна оцінка 10 балів.

- (а) твердження сформульовано з помилками, доведення відсутнє — 0–4 бали;  
 (б) твердження сформульовано вірно, доведення відсутнє — 5 балів;  
 (с) твердження сформульовано вірно та в доведенні зроблено суттєві помилки — 6–8 балів;  
 (д) твердження сформульовано вірно, наведено приклади та в доведенні можливі незначні помилки — 9–10 балів.

2. У завданнях 2, 3, 4 максимальна оцінка 10 балів:

- (а) обчислення незакінчені або містять суттєві помилки — 0–4 бали;  
 (б) обчислення правильні, можливі незначні помилки, але обґрунтування не наведено — 5–7 балів;  
 (с) обчислення правильні, можливі незначні помилки, наведено повне обґрунтування — 8–10 балів.

Бали, отримані за виконання всіх завдань, сумуються (максимальна кількість – 40 балів) і додаються до балів, отриманих за практичні завдання. Максимальна сума – 100 балів. Оцінка виставляється за стандартною шкалою оцінювання.

### Шкала оцінювання: чотирирівнева

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70-89	добре
50-69	задовільно
1-49	незадовільно

### 10. Рекомендована література

#### Основна література

- Різницькі рівняння: Методичні вказівки до самостійної роботи студентів всіх технічних спеціальностей / Укладачі: Волкова М.Г., Козін О. Б., Тарасенко І.В., Одеса, 2023. 32 с.
- Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К: Вища школа, 2000– 296 с
- Олійник А.С., Петравчук А.П. Дискретна математика. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету. – К.:2024.–177 с.

#### Допоміжна література

- Elaydi, S. An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag New York, pp. 540 (2005)
- Campbell S. Singular systems of differential equations I. – New-York-San-Francisco – London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. – 176 p.
- Vlasenko L.A., Perestyuk N.A., On the Solvability of Impulsive Differential-Algebraic Equations. Ukr. Math. J. – 2005. – V.57. – P. 551–564.
- Kelley, W.G., Peterson, A.C.: Difference Equation: An Introduction with Applications, Second Edition, Academic Press, pp. 404 (2001)
- Gefter S.L., Piven A.L., Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation in Banach and Locally Convex Spaces. // J. Math. Physics, Analysis, Geometry.–2019.– V. 15, № 3.– P. 336 – 353.
- Campbell S., Singular systems of differential equations II. – New-York-San-Francisco – London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1982.–234 p.
- S.Gefter, A. Goncharuk, A. Piven', Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 416, Springer, Cham.–2023.–P. 199–216.